Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie: $\exp : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist bijektiv, wobei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$.
2. Es sei log die zu $\exp|_U$ gehörige Umkehrfunktion. Diese ist, analog zum reellen Fall, komplex differenzierbar. Man gebe $\log'(z)$ an.
3. Sei für $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und $0 \neq z = r \exp i\varphi$ das „Argument von z“ $\arg(z) := \varphi$. Zeigen Sie: $\log zw = \log z + \log w + i(2\pi, 0, -2\pi)$, falls $\arg(z) + \arg(w) \in ((-2\pi, -\pi], (-\pi, \pi], (\pi, 2\pi])$.
4. Für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$ sei $z^a := \exp(a \log z)$. Berechnen Sie $(z^a)'$. Bestimmen Sie für $a = \mathrm{i} + 1$ den Wert (d.h. Real- und Imaginärteil) der Ableitung im Punkt $z = \mathrm{i}$.

Aufgabe 2: Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Laurentreihen.
(i) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$
(ii) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$
(iii) $f(z) = \frac{\exp(z) - 1}{z}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Hinweis: Welcher Typ von Singularität ist $z = 0$? Verformen Sie den Integrationsweg zu einem, der die Null durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene ausspart ($\rightarrow\curvearrowright\rightarrow$) und ersetzen Sie $\sin x$ mit Hilfe der Eulerformel! Berechnen Sie die beiden entstehenden Integrale jeweils durch geschicktes Schließen des Integrationswegs mit einem “unendlich großen” Halbkreis! Zeigen Sie im Detail, dass die jeweiligen Halbkreise keine BeitrÃge liefern!